

Dev n°1

Ref: Daniel Li
 "Intégration et applications"
 p 211 / 212

Démontrons un lemme utile avant:

Lemme:

Si $1 < p, q < +\infty$ et p, q conjugué, on a, pour tous nombres réels positifs $a, b \geq 0$:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad p, q$$

Démonstration:

- si a ou $b = 0$: ok
- si a et $b \neq 0$: On utilise la concavité du $\log$.

On a :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$= \ln(a) \frac{p}{p} + \ln(b) \frac{q}{q} \quad p, q$$

$$\leq \ln \frac{a^p}{p} + \ln \frac{b^q}{q}$$

$$\leq \ln \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right)$$

En utilisant l'exponentielle :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \square$$

On peut maintenant introduire l'inégalité de Hölder :

THÉORÈME: (Inégalité Hölder)

Soit $(p, q) \in]1, \infty[$ avec p et q conjugué.

Soient f et g mesurables de X vers $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On a :

$$\int_X |fg| \leq \left(\int_X |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q \right)^{1/q}.$$

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Démonstration:

1) Réductions :

- * Si $\|f\|_p = 0$ alors $\int_X |f|^p = 0$ et $|f|^p = 0$ p.p. donc $f = 0$ p.p.
 Alors $fg = 0$ p.p. et $\int_X |fg| = 0$ p.p.
 Donc, l'inégalité est vérifiée.

On conclut la même chose si $\|g\|_q = 0$.

On suppose donc $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$.

- * Si $\|f\|_p = +\infty$ ou $\|g\|_q = +\infty$ (comme $\neq 0$) on aura $+\infty \leq +\infty$.
 Donc l'inégalité est vérifiée.

On suppose, également, que $\|f\|_p$ et $\|g\|_q \neq +\infty$.

2) Preuve :

Donc l'inégalité est vérifiée.

On suppose, également, que $\|f\|_p$ et $\|g\|_q \neq +\infty$.

2) Preuve:

Faisons

$$\tilde{f} = \frac{1}{\|f\|_p} |f| \quad \text{et} \quad \tilde{g} = \frac{1}{\|g\|_q} |g|. \quad \text{et } p, q \text{ conjugués.}$$

On a $\|\tilde{f}\|_p = \|\tilde{g}\|_q = 1$.

On a:

$$\int_X |fg| = \int_X (\|f\|_p \tilde{f}) (\|g\|_q \tilde{g})$$

$$= \|f\|_p \|g\|_q \int_X \tilde{f} \tilde{g}$$

p210/211

$$\stackrel{\text{Pontryagin}}{\leq} \|f\|_p \|g\|_q \left[\int_X \frac{\tilde{f}^p}{p} + \frac{\tilde{g}^q}{q} \right]$$

$$\leq \|f\|_p \|g\|_q \left[\frac{1}{p} \int \tilde{f}^p + \frac{1}{q} \int \tilde{g}^q \right]$$

$$\leq \|f\|_p \|g\|_q \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right]$$

$$\leq \|f\|_p \|g\|_q \quad \square$$

THÉORÈME: (Inégalité de Minkowski)

Soient $p \in [1, +\infty[$, $f, g \geq 0$ mesurables.

Alors,

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Démonstration:

* Supposons $p=1$.

$$\|f+g\|_1 = \int |f+g| \leq \int |f| + |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

1) Restriction (cas 0 ou $+\infty$)

2) Général:

* Supposons $p > 1$ et $\|f\|_p, \|g\|_p \neq 0$ et $+\infty$

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p = \int |f+g| |f+g|^{p-1}$$

$$= \int f (f+g)^{p-1} + \int g (f+g)^{p-1}$$

$$\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left[\|f\|_p + \|g\|_p \right] \times \underbrace{\left[\int (f+g)^{(p-1) \times \frac{p}{p-1}} \right]^{1-\frac{1}{p}}}_{(*)}$$

$\Rightarrow$ On divise de chaque côté par $(*)$ et on a l'égalité souhaitée $\square$

Annexe:

* Pour $p=+\infty$ on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|.$$

* Pour $\lambda(\Omega) < +\infty$ on a $L^1(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec $1 < p < q$.

Démo:

* Par $\lambda(\Omega) < +\infty$ on a $L^1(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec $1 < p < q$.

Démo:

Soit $f \in L^q(\Omega)$. On utilise Hölder.

- $\|f\|_1 = \|f \cdot 1\|_1 \leq \|f\|_q \underbrace{\|1\|_q}_{< +\infty} < +\infty$ car $\lambda(\Omega)$ fini
- $\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\lambda \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^q d\lambda \right)^{1/q} \left(\int_{\Omega} 1 d\lambda \right)^{1/p} = \|f\|_q \times \|1\|_q^{1/p} < +\infty$.

* M.q Γ est log convexe :

Démo:

$$\Gamma(\theta x + (1-\theta)y) = \int_0^{+\infty} \underbrace{(e^{-t} + x^{-1})^\theta}_f \underbrace{(e^{-t} + y^{-1})^{1-\theta}}_g dt \quad p = \frac{1}{\theta}, q = \frac{1}{1-\theta}$$

$$\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_0^{+\infty} f^{1/\theta} \right)^\theta \left(\int_0^{+\infty} g^{1/(1-\theta)} \right)^{1-\theta}$$

$$= \Gamma(x)^\theta \Gamma(y)^{1-\theta}$$

En passant au log:

$$\log(\Gamma(\theta x + (1-\theta)y)) \leq \theta \log(\Gamma(x)) + (1-\theta) \log(\Gamma(y))$$

Donc, Γ est log convexe.

* Si $\|f\|_p$ ou $\|g\|_q = +\infty$, on aura $+\infty \leq +\infty$.
 $\hookrightarrow$ On s.q. $\|f\|_p \neq +\infty \neq \|g\|_q$.

2) Preuve:

Posons $\tilde{f} = \frac{1}{\|f\|_p} |f|$ et $\tilde{g} = \frac{1}{\|g\|_q} |g|$ et p, q conjugués.
 On a $\|\tilde{f}\|_p = \|\tilde{g}\|_q = 1$.

On a:

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 &= \int_X |fg| = \int_X (\|f\|_p \tilde{f})(\|g\|_q \tilde{g}) \\ &= \|f\|_p \|g\|_q \int_X \tilde{f} \tilde{g} \\ &\stackrel{\text{lemme}}{\leq} \|f\|_p \|g\|_q \left[\int_X \frac{\tilde{f}^p}{p} + \frac{\tilde{g}^q}{q} \right] \\ &\leq \|f\|_p \|g\|_q \underbrace{\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right]}_{=1} \quad \square \end{aligned}$$

Démo: (Minkowski)

* S.q. $p=1$:

In. triangulaire de $\|\cdot\|_1$

* S.q. $p \geq 1$ et $\|f\|_p, \|g\|_p \neq 0$ et $\neq +\infty$:

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p = \int |f+g| |f+g|^{p-1} \\ &\leq \int |f| |f+g|^{p-1} + \int |g| |f+g|^{p-1} \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} [\|f\|_p + \|g\|_p] \times \underbrace{\left[\int (f+g)^{(p-1) \frac{p}{p-1}} \right]^{\frac{p-1}{p}}}_{(*)} \end{aligned}$$

En divisant chaque côté par (*) on a l'inégalité $\square$

Application:

Soit $\theta \in [0, 1]$ et $x, y \in \mathbb{R}$. On a:

$$\begin{aligned} \Gamma(\theta x + (1-\theta)y) &= \int_0^{+\infty} (e^{-t+x-1})^\theta (e^{-t+y-1})^{1-\theta} dt \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \Gamma(x)^\theta \Gamma(y)^{1-\theta} \quad \left(p = \frac{1}{\theta}; q = \frac{1}{1-\theta} \right) \end{aligned}$$

En passant au log, Γ est log convexe $\square$

Thm: ($\leq$ Minkowski)

Soient $p \in [1, \infty[$, f, g m.

Alors, $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Thm: ($\leq$ Hölder)

Soit $(p, q) \in]1, \infty[$ avec p, q conjugués.

Soient f et $g: X \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$ mesurables.

On a: $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Lemme: (Young)

$1 < p, q < \infty$ et p, q conjugués. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Démo: (Lemme)

• si a ou $b = 0$. OK

• sinon, on a: $\ln(ab) = p \ln a + q \ln b$.

$$= \ln(a)^{\frac{p}{p}} + \ln(b)^{\frac{q}{q}}$$

$$= \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q)$$

$$\leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \quad \swarrow \text{concavité}$$

$$\Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \square$$

Démo: (Hölder)

1) Réductions:

* Si $\|f\|_p = 0$ alors, $\int_X |f|^p = 0$ et $|f|^p = 0$ p.p. $\Rightarrow f = 0$ p.p.

Alors $fg = 0$ p.p. et $\|fg\|_1 = 0$.

L'inégalité est vérifiée.

De même pour $\|g\|_q = 0$.

Soit $\|f\|_p$ et $\|g\|_q > 0$.